BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

*№2* *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2013*

**УДК 517.983.53**

# О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ С ОПЕРАТОРНО-ЗНАЧНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

**А.Р.АЛИЕВ*, Н.Л.МУРАДОВА****

***Бакинский Государственный Университет,***

***Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,***

*****Нахичеванский Государственный Университет***

***alievaraz@yahoo.com, nazilamuradova@gmail.com***

*В данной работе изучается на полуоси краевая задача для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с разрывным коэффициентом, в краевом условии которой участвует некоторый линейный оператор. С помощью свойств операторных коэффициентов уравнения и краевого условия находятся достаточные условия корректной и однозначной разрешимости рассматриваемой краевой задачи в пространстве типа Соболева.*

**Ключевые слова:** *операторно-дифференциальное уравнение, операторно-значное краевое условие, самосопряженный оператор, пространство типа Соболева, разрывной коэффициент.*

Данная работа посвящена исследованию краевой задачи с операторно-значным краевым условием для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом. Такие уравнения охватывают некоторые неклассические задачи математической физики (см. [1]), исследуемые в неоднородных средах, а также уравнения, моделирующие течения жидкости в вязкоупругих деформируемых трубках [2].

Пусть $H$ - сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y)$, $x, y \in H$, а $A$ - положительно-определенный самосопряженный оператор в $H$ ($A = A^* \geq cE$, $c > 0$, $E$ - единичный оператор). Под $H_\gamma$ ($\gamma \geq 0$) будем понимать шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором $A$, т.е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$,

$(x,y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x,y \in D(A^\gamma)$, при этом в случае $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$, $(x,y)_0 = (x,y)$, $x,y \in H$.

Обозначим через $L_2([a,b];H)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, гильбертово пространство всех вектор-функций, определенных на $[a,b]$ со значениями в $H$ и нормой

$$\| f \|_{L_2([a,b];H)} = \left( \int_a^b \| f(t) \|_H^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Следуя книге [3], введем гильбертово пространство

$$W_2^3([a,b];H) = \{ u(t) : u'''(t) \in L_2([a,b];H), A^3 u(t) \in L_2([a,b];H) \}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3([a,b];H)} = \left( \|u'''\|^2_{L_2([a,b];H)} + \|A^3 u\|^2_{L_2([a,b];H)} \right)^{1/2}.$$

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле теории распределений в гильбертовом пространстве [3]. При $a = -\infty$, $b = +\infty$ будем полагать, что $L_2((-\infty,+\infty);H) \equiv L_2(R;H)$, $W_2^3((-\infty,+\infty);H) \equiv W_2^3(R;H)$, а при $a = 0$, $b = +\infty$ - $L_2([0,+\infty);H) \equiv L_2(R_+;H)$, $W_2^3([0,+\infty);H) \equiv W_2^3(R_+;H)$.

В дальнейшем через $L(X,Y)$ понимаем пространство линейных ограниченных операторов, действующих из пространства $X$ в пространство $Y$.

Рассмотрим в пространстве $H$ задачу

$$u'''(t) + \rho(t) A^3 u(t) = f(t), \; t \in R_+, \tag{1}$$

$$u''(0) = Tu(0), \tag{2}$$

где $A = A^* \ge cE$, $c > 0$, $T \in L(H_{5/2}, H_{1/2})$, $\rho(t) = \alpha$, если $0 \le t \le 1$, $\rho(t) = \beta$, если $1 < t < +\infty$, причем $\alpha$, $\beta$ - положительные, вообще говоря, не равные друг другу числа, $f(t) \in L_2(R_+;H)$, $u(t) \in W_2^3(R_+;H)$.

**Определение 1.** *Если вектор-функция $u(t) \in W_2^3(R_+;H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $R_+$, тогда ее будем называть регулярным решением уравнения (1).*

**Определение 2.** *Если при любом $f(t) \in L_2(R_+;H)$ существует регулярное решение уравнения (1), которое удовлетворяет краевому условию (2) в смысле $\lim_{t \to 0} \| u''(t) - Tu(t) \|_{H_{1/2}} = 0$ и имеет место неравенство*

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)} \le const \| f \|_{L_2(R_+;H)},$$

*тогда будем говорить, что задача (1), (2) регулярно разрешима.*

Подобного рода задачи на полуоси для эллиптических операторно-дифференциальных уравнений второго порядка рассмотрены в работах [4-6]. Отметим, что задача (1), (2) исследована в случае $T=0$ в работах [7, 8], а когда $\rho(t)\equiv 1,\ t\in R_+$, и $T=0$ - в работе [9].

В этой работе с помощью свойств операторных коэффициентов уравнения (1) и краевого условия (2) мы получим условия регулярной разрешимости данной краевой задачи.

С этой целью, обозначим диктуемое краевым условием (2) подпространство пространства $W_2^3(R_+;H)$ через

$$W_{2,T}^3(R_+;H)=\{u(t): u(t)\in W_2^3(R_+;H),\ u''(0)=Tu(0)\},$$

а через $P_0$ оператор, действующий из пространства $W_{2,T}^3(R_+;H)$ в пространство $L_2(R_+;H)$ по правилу

$$P_0u(t)=u'''(t)+\rho(t)A^3u(t),\ u(t)\in W_{2,T}^3(R_+;H).$$

**Теорема 1.** *Пусть* $A=A^*\geq cE$, $c>0$, $T\in L\left(H_{5/2},H_{1/2}\right)$ *и оператор*

$$T_{\alpha,\beta}=E-\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2}}A^{-2}T+\frac{\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\alpha}\omega_1}\left(E+\frac{\omega_1}{\sqrt[3]{\alpha^2}}A^{-2}T\right)e^{-\sqrt[3]{\alpha}(\omega_1+1)A}+$$
$$+\frac{\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\alpha}\omega_2}\left(E+\frac{\omega_2}{\sqrt[3]{\alpha^2}}A^{-2}T\right)e^{-\sqrt[3]{\alpha}(\omega_2+1)A}$$

*ограниченно обратим в пространстве* $H_{5/2}$, *где* $\omega_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ *и* $\omega_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. *Тогда уравнение* $P_0u=0$ *имеет единственное нулевое решение из пространства* $W_{2,T}^3(R_+;H)$.

**Доказательство.** Общее решение уравнения $P_0u(t)=0$ из пространства $W_2^3(R_+;H)$ имеет следующий вид [8]:

$$u_0(t)=\begin{cases}u_{0,1}(t)=e^{-\sqrt[3]{\alpha}tA}\varphi_0+e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_1(1-t)A}\varphi_1+e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_2(1-t)A}\varphi_2, & \text{если } 0\leq t<1,\\ u_{0,2}(t)=e^{-\sqrt[3]{\beta}(t-1)A}\varphi_3, & \text{если } 1<t<+\infty,\end{cases}$$

где векторы $\varphi_k\in H_{5/2}$, $k=0,1,2,3$, определяются из краевого условия (2) и из условия $u_0(t)\in W_2^3(R_+;H)$. Следовательно, для определения векторов $\varphi_k$, $k=0,1,2,3$, имеем следующие соотношения:

$$u''_{0,1}(0)=Tu_{0,1}(0),\ u_{0,1}(1)=u_{0,2}(1),\ u'_{0,1}(1)=u'_{0,2}(1),\ u''_{0,1}(1)=u''_{0,2}(1).$$

Из этих соотношений получаем следующую систему уравнений относительно $\varphi_k$, $k=0,1,2,3$:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{\alpha^2}A^2\left(\varphi_0+\omega_1^2e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_1 A}\varphi_1+\omega_2^2e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_2 A}\varphi_2\right)=T\left(\varphi_0+e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_1 A}\varphi_1+e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_2 A}\varphi_2\right),\\ e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2=\varphi_3,\\ -\sqrt[3]{\alpha}e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\varphi_0+\sqrt[3]{\alpha}\omega_1\varphi_1+\sqrt[3]{\alpha}\omega_2\varphi_2=-\sqrt[3]{\beta}\varphi_3,\\ \sqrt[3]{\alpha^2}e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\varphi_0+\sqrt[3]{\alpha^2}\omega_1^2\varphi_1+\sqrt[3]{\alpha^2}\omega_2^2\varphi_2=\sqrt[3]{\beta^2}\varphi_3.\end{cases} \tag{3}$$

Из этой системы, в свою очередь, следует, что

$$\varphi_1=\frac{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}\omega_2}e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\varphi_0,\quad \varphi_2=\frac{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}\omega_1}e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\varphi_0,$$

$$\varphi_3=\frac{3\sqrt[3]{\alpha^2}}{\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\varphi_0,$$

$$\varphi_0-\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2}}A^{-2}T\varphi_0+\frac{\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\alpha}\omega_1}\left(E+\frac{\omega_1}{\sqrt[3]{\alpha^2}}A^{-2}T\right)e^{-\sqrt[3]{\alpha}(\omega_1+1)A}\varphi_0+$$

$$+\frac{\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\alpha}\omega_2}\left(E+\frac{\omega_2}{\sqrt[3]{\alpha^2}}A^{-2}T\right)e^{-\sqrt[3]{\alpha}(\omega_2+1)A}\varphi_0=0.$$

Таким образом,

$$T_{\alpha,\beta}\varphi_0\equiv\left[E-\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2}}A^{-2}T+\frac{\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\alpha}\omega_1}\left(E+\frac{\omega_1}{\sqrt[3]{\alpha^2}}A^{-2}T\right)e^{-\sqrt[3]{\alpha}(\omega_1+1)A}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\alpha}\omega_2}\left(E+\frac{\omega_2}{\sqrt[3]{\alpha^2}}A^{-2}T\right)e^{-\sqrt[3]{\alpha}(\omega_2+1)A}\right]\varphi_0=0. \tag{4}$$

Поскольку по условию теоремы $T_{\alpha,\beta}$ ограниченно обратим в пространстве $H_{5/2}$, то из уравнения (4) вытекает, что $\varphi_0=0$. Следовательно, $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=0$, т.е. $u_0(t)=0$. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению вопроса регулярной разрешимости задачи (1), (2).

**Теорема 2.** *Задача (1), (2) при выполнении условий теоремы 1 регулярно разрешима.*

**Доказательство**. Покажем, что уравнение $P_0u(t)=f(t)$ имеет решение $u(t)\in W_{2,T}^3(R_+;H)$ при любом $f(t)\in L_2(R_+;H)$. Прежде продолжим вектор-функцию $f(t)$ нулем для $t<0$. Пусть $\hat{f}(\xi)$ есть преобразование Фурье вектор-функции $f(t)$, т.е.

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}dt,$$

где интеграл в правой части понимается в смысле сходимости в среднем в $H$. Тогда, применяя прямое и обратное преобразования Фурье, становится ясно, что вектор-функции

$$\upsilon_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\xi^3E+\alpha A^3\right)^{-1}\left(\int_0^{+\infty} f(s)e^{-i\xi s}ds\right)e^{it\xi}d\xi,\ t\in R,$$

и

$$\upsilon_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\xi^3E+\beta A^3\right)^{-1}\left(\int_0^{+\infty} f(s)e^{-i\xi s}ds\right)e^{it\xi}d\xi,\ t\in R,$$

удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^3\upsilon(t)}{dt^3}+\alpha A^3\upsilon(t)=f(t)$$

и

$$\frac{d^3\upsilon(t)}{dt^3}+\beta A^3\upsilon(t)=f(t),$$

соответственно, почти всюду в $R$. Докажем, что $\upsilon_1(t)$ и $\upsilon_2(t)$ принадлежат $W_2^3(R;H)$. По теореме Планшереля

$$\begin{aligned}\|\upsilon_1(t)\|^2_{W_2^3(R;H)}&=\|\upsilon_1'''(t)\|^2_{L_2(R;H)}+\|A^3\upsilon_1(t)\|^2_{L_2(R;H)}=\\&=\|-i\xi^3\hat{\upsilon}_1(\xi)\|^2_{L_2(R;H)}+\|A^3\hat{\upsilon}_1(\xi)\|^2_{L_2(R;H)},\end{aligned}$$

где $\hat{\upsilon}_1(\xi)$ есть преобразование Фурье функции $\upsilon_1(t)$. Поскольку

$$\hat{\upsilon}_1(\xi)=\left(-i\xi^3E+\alpha A^3\right)^{-1}\hat{f}(\xi),$$

то

$$\begin{aligned}\|-i\xi^3\hat{\upsilon}_1(\xi)\|_{L_2(R;H)}&=\left\|-i\xi^3\left(-i\xi^3E+\alpha A^3\right)^{-1}\hat{f}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)}\le\\&\le\sup_{\xi\in R}\left\|-i\xi^3\left(-i\xi^3E+\alpha A^3\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|\hat{f}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)}=\\&=\sup_{\xi\in R}\left\|-i\xi^3\left(-i\xi^3E+\alpha A^3\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\|f(t)\|_{L_2(R;H)}.\end{aligned}\tag{5}$$

Из спектральной теории самосопряженных операторов следует, что

$$\left\|-i\xi^3\left(-i\xi^3E+\alpha A^3\right)^{-1}\right\|=\sup_{\sigma\in\sigma(A)}\left|-i\xi^3\left(-i\xi^3+\alpha\sigma^3\right)^{-1}\right|=$$

$$= \sup_{\sigma\in\sigma(A)} \frac{|\xi|^3}{\left(\xi^6+\alpha^2\sigma^6\right)^{1/2}} \le 1.$$

Следовательно, из (5) вытекает, что $-i\xi^3\hat{\upsilon}_1(\xi)\in L_2(R;H)$. Поскольку же

$$\left\|A^3\hat{\upsilon}_1(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} = \left\|A^3\left(-i\xi^3E+\alpha A^3\right)^{-1}\hat{f}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} \le$$

$$\le \sup_{\xi\in R}\left\|A^3\left(-i\xi^3E+\alpha A^3\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|\hat{f}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} =$$

$$= \sup_{\xi\in R}\left\|A^3\left(-i\xi^3E+\alpha A^3\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|f(t)\right\|_{L_2(R;H)}, \qquad (6)$$

то опять-таки из спектральной теории самосопряженных операторов имеем:

$$\left\|A^3\left(-i\xi^3E+\alpha A^3\right)^{-1}\right\| = \sup_{\sigma\in\sigma(A)}\left|\sigma^3\left(-i\xi^3+\alpha\sigma^3\right)^{-1}\right| =$$

$$= \sup_{\sigma\in\sigma(A)} \frac{\sigma^3}{\left(\xi^6+\alpha^2\sigma^6\right)^{1/2}} \le \frac{1}{\alpha}.$$

Тем самым, из (6) следует, что $A^3\hat{\upsilon}_1(\xi)\in L_2(R;H)$. Следовательно, $\upsilon_1(t)\in W_2^3(R;H)$. Таким же образом $\upsilon_2(t)\in W_2^3(R;H)$.

Обозначим сужение вектор-функции $\upsilon_1(t)$ на $[0,1)$ через $u_\alpha(t)$, а сужение вектор-функции $\upsilon_2(t)$ на $(1,+\infty)$ через $u_\beta(t)$. Очевидно, что $u_\alpha(t)\in W_2^3([0,1);H)$, $u_\beta(t)\in W_2^3((1,+\infty);H)$. Тогда из теоремы о следах [3, гл.1] следует, что $\frac{d^s u_\alpha(0)}{dt^s}$, $\frac{d^s u_\alpha(1)}{dt^s}$, $\frac{d^s u_\beta(0)}{dt^s}$, $\frac{d^s u_\beta(1)}{dt^s}\in H_{5/2-s}$, $s=0,1,2$.

Теперь обозначим через

$$u(t)=\begin{cases} u_1(t)=u_\alpha(t)+e^{-\sqrt[3]{\alpha}tA}\psi_0+e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_1(1-t)A}\psi_1+e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_2(1-t)A}\psi_2, \text{ если } 0\le t<1, \\ u_2(t)=u_\beta(t)+e^{-\sqrt[3]{\beta}(t-1)A}\psi_3, \text{ если } 1<t<+\infty, \end{cases}$$

где $\psi_k\in H_{5/2}$, $k=0,1,2,3$. Векторы $\psi_k$, $k=0,1,2,3$, определяем из условия $u(t)\in W_{2,T}^3(R_+;H)$, т.е. из следующих соотношений:

$$u_1''(0)=Tu_1(0),\ u_1(1)=u_2(1),\ u_1'(1)=u_2'(1),\ u_1''(1)=u_2''(1).$$

Отсюда относительно $\psi_k$, $k=0,1,2,3$, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u''_\alpha(0)+\sqrt[3]{\alpha^2}A^2\left(\psi_0+\omega_1^2 e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_1 A}\psi_1+\omega_2^2 e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_2 A}\psi_2\right)= \\ =Tu_\alpha(0)+T\left(\psi_0+e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_1 A}\psi_1+e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_2 A}\psi_2\right), \\ u_\alpha(1)+e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\psi_0+\psi_1+\psi_2=u_\beta(1)+\psi_3, \\ u'_\alpha(1)-\sqrt[3]{\alpha}Ae^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\psi_0+\sqrt[3]{\alpha}\omega_1 A\psi_1+\sqrt[3]{\alpha}\omega_2 A\psi_2=u'_\beta(1)-\sqrt[3]{\beta}A\psi_3, \\ u''_\alpha(1)+\sqrt[3]{\alpha^2}A^2e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\psi_0+\sqrt[3]{\alpha^2}\omega_1^2A^2\psi_1+\sqrt[3]{\alpha^2}\omega_2^2A^2\psi_2=u''_\beta(1)+\sqrt[3]{\beta^2}A^2\psi_3. \end{cases}$$

Из этой системы получаем:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\alpha^2}\left(\psi_0+\omega_1^2 e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_1 A}\psi_1+\omega_2^2 e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_2 A}\psi_2\right)- \\ -A^{-2}T\left(\psi_0+e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_1 A}\psi_1+e^{-\sqrt[3]{\alpha}\omega_2 A}\psi_2\right)=A^{-2}\left(Tu_\alpha(0)-u''_\alpha(0)\right), \\ e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\psi_0+\psi_1+\psi_2-\psi_3=u_\beta(1)-u_\alpha(1), \\ -\sqrt[3]{\alpha}e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\psi_0+\sqrt[3]{\alpha}\omega_1\psi_1+\sqrt[3]{\alpha}\omega_2\psi_2+\sqrt[3]{\beta}\psi_3=A^{-1}\left(u'_\beta(1)-u'_\alpha(1)\right), \\ \sqrt[3]{\alpha^2}e^{-\sqrt[3]{\alpha}A}\psi_0+\sqrt[3]{\alpha^2}\omega_1^2\psi_1+\sqrt[3]{\alpha^2}\omega_2^2\psi_2-\sqrt[3]{\beta^2}\psi_3=A^{-2}\left(u''_\beta(1)-u''_\alpha(1)\right). \end{cases} \quad (7)$$

Так как $u_\alpha(t)\in W_2^3([0,1];H)$ и $u_\beta(t)\in W_2^3((1,+\infty);H)$, то по теореме о следах [3] $A^{-2}\left(Tu_\alpha(0)-u''_\alpha(0)\right)$, $u_\beta(1)-u_\alpha(1)$, $A^{-1}\left(u'_\beta(1)-u'_\alpha(1)\right)$ и $A^{-2}\left(u''_\beta(1)-u''_\alpha(1)\right)$ принадлежат $H_{5/2}$. Тогда через эти величины, действуя также как в системе (3), при этом, принимая во внимание, что оператор $T_{\alpha,\beta}$ ограниченно обратим в пространстве $H_{5/2}$, явно можно найти векторы $\psi_k$, $k=0,1,2,3$, причем все $\psi_k\in H_{5/2}$, $k=0,1,2,3$. Следовательно, $u(t)\in W_2^3(R_+;\,H)$, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $R_+$ и условию (2).

По теореме 1 задача

$$u'''(t)+\rho(t)A^3u(t)=0,$$
$$u''(0)=Tu(0)$$

имеет лишь нулевое решение из пространства $W_{2,T}^3(R_+;H)$.

Теперь покажем, что оператор $P_0:W_{2,T}^3(R_+;H)\to L_2(R_+;H)$ является ограниченным. Действительно, при $u(t)\in W_{2,T}^3(R_+;H)$ имеем:

$$\|P_0u\|^2_{L_2(R_+;H)} = \|u'''\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|\rho(t)A^3u\|^2_{L_2(R_+;H)} + 2\,\mathrm{Re}\big(u''', \rho(t)A^3u\big)_{L_2(R_+;H)} \le$$
$$\le \|u'''\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|\rho(t)A^3u\|^2_{L_2(R_+;H)} + 2\|u'''\|_{L_2(R_+;H)}\|\rho(t)A^3u\|_{L_2(R_+;H)} \le$$
$$\le 2\Big(\|u'''\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|\rho(t)A^3u\|^2_{L_2(R_+;H)}\Big) \le 2\max\big(1;\alpha^2;\beta^2\big)\|u\|^2_{W_2^3(R_+;H)}.$$

Таким образом, по теореме Банаха об обратном операторе существует $P_0^{-1} : L_2(R_+;H) \to W^3_{2,T}(R_+;H)$ и он ограничен. Отсюда следует, что

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)} \le const \| f \|_{L_2(R_+;H)}.$$

Теорема доказана.

На основании теорем 1 и 2 сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда оператор* $P_0$ *осуществляет изоморфизм между пространствами* $W^3_{2,T}(R_+;H)$ *и* $L_2(R_+;H)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981, 448 с.
2. Амензаде Р.Ю. О распространении стационарных волн в составной деформируемой трубке, заполненной вязкой жидкостью // Механика полимеров, 1976, №1, с.175-178.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
4. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференциальные уравнения, 1992, т. 28, № 4, с. 651-661.
5. Мирзоев С.С., Алиев А.Р., Рустамова Л.А. Об условиях разрешимости краевой задачи для эллиптического операторно-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом // Математические заметки, 2012, т. 92, № 5, с. 789-793.
6. Mirzoev S.S., Aliev A.R., Rustamova L.A. On the boundary value problem with the operator in boundary conditions for the operator-differential equation of second order with discontinuous coefficients // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2013, v. 9, № 2, p. 207-226.
7. Mirzoyev S.S., Aliyev A.R. Initial boundary value problems for a class of third order operator-differential equations with variable coefficients // Transactions of NAS of Azerbaijan, Ser. of Phys.-Tech. and Math. Sciences, 2006, v. 26, № 4, p. 153-164.
8. Алиев А.Р. К теории разрешимости некоторых операторно-дифференциальных уравнений. Saarbrücken, Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2012, 296 с.
9. Мирзоев С.С. Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР, 1983, т. 273, № 2, с. 292-295.

## KƏSİLƏN ƏMSALLI ÜÇÜNCÜ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN SƏRHƏD ŞƏRTİ OPERATOR QİYMƏTLİ MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

**A.R.ƏLİYEV, N.L.MURADOVA**

**XÜLASƏ**

Təqdim olunmuş işdə sərhəd şərtində müəyyən xətti operator iştirak etdiyi kəsilən əmsallı üçüncü tərtib operator-diferensial tənlik üçün yarımoxda sərhəd məsələsi öyrənilir. Tənlikdə və sərhəd şərtində iştirak edən operator əmsalların xassələri ilə baxılan sərhəd məsələsinin Sobolev tipli fəzada korrekt və birqiymətli həll olunması üçün kafi şərtlər tapılır.

**Açar sözlər:** operator-diferensial tənlik, operator qiymətli sərhəd şərti, öz-özünə qoşma operator, Sobolev tipli fəza, kəsilən əmsal.

## SOLVABILITY OF A PROBLEM WITH AN OPERATOR-VALUED BOUNDARY CONDITION FOR A THIRD ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A DISCONTINUOUS COEFFICIENT

**A.R.ALIYEV, N.L.MURADOVA**

**SUMMARY**

In this paper, we study a boundary value problem on a semiaxis for a third order operator-differential equation with discontinuous coefficient and the boundary condition that involves a linear operator. By means of the properties of operator coefficients of the equation and the boundary condition, we find sufficient conditions of the well-posed and unique solvability of the considered boundary value problem in a Sobolev-type space.

**Key words:** operator-differential equation, operator-valued boundary condition, self-adjoint operator, the Sobolev-type space, discontinuous coefficient.

*Поступила в редакцию: 09.04.2013 г.*
*Подписано к печати: 24.05.2013 г.*